

Сычугов Д.Ю., МГУ ВМК
Online семинары для студентов 2 курса
(201 группа)

Математический анализ
Функциональные ряды. Занятие 10
(степенные ряды)

СЕМЕСТР 1, СЕМИНАР 10

группа 201,
Сычугов Д.Ю.

стр. 0

Домашнее задание к предыдущему семинару:

2808a) $\lim_{x \rightarrow +0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x}$; $U_n(x) = \frac{1}{2^n n^x}$ - непрерывна на $[0; +\infty)$
 $U_n(x) \rightarrow 0$ на $[0, \infty)$, т.к. $|U_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$ } $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ возможен пред. переход под знаком $\sum \Rightarrow$
 $\lim_{x \rightarrow +0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{2^n n^x} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$

2808b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2} + n^2}$; $U_n(x) = \frac{1}{\frac{1}{x^2} + n^2}$, $X = [R, +\infty)$
где $R > 0$ - нек. число

$U_n(x) \leq \frac{1}{n^2}$, $U_n(x)$ - непрерывна на $[R; \infty)$ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) \rightarrow 0$ на $X \Rightarrow$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (см. задачу 2961, ее мы будем разбирать во 2м семестре по теме "ряды Фурье")

2803

$f_n(x) = n x e^{-n x^2}$, $x \in [0; 1]$, $f_n(x) \rightarrow 0$ на $[0; 1]$, равномерно или нет?
 $f'_n(x) = e^{-n x^2} - 2 n^2 x^2 e^{-n x^2} = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2n}} \Rightarrow f_n(x_2) = n \frac{1}{\sqrt{2n}} e^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}} \rightarrow 0$

$\Rightarrow$ сходимость неравномерная, поэтому усл. th о переходе под знаком $\int$ не выполняется
 $\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 n x e^{-n x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-n x^2} d(n x^2) = \frac{1}{2} \int_0^n e^{-t} dt = \frac{1}{2} (1 - e^{-n}) \rightarrow \frac{1}{2}$ при $n \rightarrow \infty$
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$

СЕМЕСТР 1, СЕМИНАР 10

стр 1

Теория:

Степенные ряды

Определение

Степенным рядом называется ряд вида $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ (1)

Теорема 1) Ряд (1) сходится на интервале $|x-x_0| < R$, причем в граничных точках $|x-x_0| = R$ ряд (1) может как сходиться, так и расходиться (нужно доп. исследование; Comment: R наз. рад. сходимости, возможно $R=0$, $R=\infty$, $R=\mathbb{C}$)

2) Для вычисления R $\exists$ формулы: $\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ (2), либо

$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ (3) (Comment: предел (3) $\exists$ не всегда, однако, если он $\exists$, то ф-лы (2) и (3) дают одинаковый результат);

3) На интервале $|x-x_0| < R$ ряд (1) можно почленно дифференцировать $\forall$ число раз (Comment: т.е. ф-ция $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ имеет при $|x-x_0| < R$ любое число произв., и почленное диф. не меняет радиус сходимости);

4) Для $\forall \varepsilon > 0$ на отрезке $|x-x_0| \leq R - \varepsilon$ ряд (1) $\Rightarrow$ (и все его произв. тоже).

Теорема 2 Разложение $f(x)$ в точке x_0 в степенной ряд
 - единственно, поэтому степенной ряд для $f(x)$ совпадает
 с рядом Тейлора:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) (x-x_0)^n \quad (4)$$

можно использ. станд. разложения

Теорема 3 (Абеля) Если степенной ряд (1) сходится в точке
 $x = x_0 + R$, то $f(x_0 + R) = \lim_{x \rightarrow x_0 + R-0} f(x) \quad (5)$

2812 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$; 1) $\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{p}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{p \ln n}{n}} = e^0 = 1$;
 $\Rightarrow R=1$; 2) $x=1$? $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ - сход. при $p > 1$; 3) $x=-1$? $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ - сход. абс. при $p > 1$

2814 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$ 1) $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = 4$;
 2) $x = \pm 4$? $a_n \cdot 4^n = \frac{(\sqrt{2\pi n} e^{-n+\theta_n/12n} \cdot n^n)^2}{\sqrt{4\pi n} e^{-2n+\delta_{2n}/24n} \cdot (2n)^{2n}} \cdot 4^n = \frac{2\pi n}{\sqrt{4\pi n}} e^{\theta_n/12n - \delta_{2n}/24n} \rightarrow \infty \Rightarrow$ расх. при $x = \pm 4$;

стр 3

2813 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$, $(x_0 = -1)$, $\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^n + (-2)^n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^n + 2^n}{n}} = 3 \Rightarrow R = \frac{1}{3}$;

2) $x = x_0 + R = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3)^n + (-2)^n}{n} \left(-\frac{2}{3} + 1\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n}$ расход.

3) $x = x_0 - R = -1 - \frac{1}{3} = -\frac{4}{3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3)^n + (-2)^n}{n} \left(-\frac{4}{3} + 1\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{n}$ сход. усл.

2815. $\sum_{n=1}^{\infty} a^{n^2} x^n$, $\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0 \Rightarrow R = \infty \Rightarrow$ сход. на $(-\infty; \infty)$

2830 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n} = \frac{x}{2^1} + \frac{x^4}{2^2} + \frac{x^9}{2^3} + \dots$, $a_n = \begin{cases} 0, n \neq k^2 \\ \frac{1}{2^k}, n = k^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{R} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k^2]{\frac{1}{2^k}} = 1$

2) $x = 1 \Rightarrow \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} \rightarrow 1$

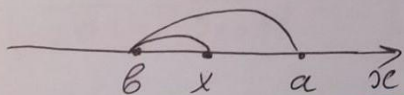
3) $x = -1 \Rightarrow \frac{-1}{2^1} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \dots\right) \rightarrow \frac{1}{2}$

2839 $f(x) = \frac{1}{a-x}$, $a \neq 0$ а) Разложить по степеням x , (т.е. $|x| < a$),
или $\left|\frac{x}{a}\right| < 1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{a} \frac{1}{1 - \frac{x}{a}} = \left(\frac{x}{a} = q, |q| < 1\right) = \frac{1}{a} \left(1 + \left(\frac{x}{a}\right) + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^3 + \dots\right)$ ($R = a$)

8) Разложить по степеням $x-b$, где $b \neq a$ (т.е. $|x-b| < |a-b|$) стр. 4

$$\frac{1}{a-x} = \frac{1}{(a-b) - (x-b)} = \frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{1 - \frac{(x-b)}{(a-b)}} = \frac{1}{a-b} \cdot \left(1 + \frac{x-b}{a-b} + \left(\frac{x-b}{a-b} \right)^2 + \dots \right)$$

$$R = |b-a|$$



9) Разложить по степеням $\frac{1}{x}$: (т.е. $|x| > |a|$)

$$\frac{1}{a-x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\frac{a}{x} - 1} = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 - \frac{a}{x}} = -\frac{1}{x} \cdot \left(1 + \frac{a}{x} + \left(\frac{a}{x} \right)^2 + \dots \right)$$

$$R? \quad \left| \frac{a}{x} \right| < 1 \Rightarrow |x| > |a|$$

2840

$$f(x) = \ln x = \ln(1 + (x-1)) = |x-1| \text{ - малое, } |x-1| < 1 =$$

$$= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots \quad (6). \text{ Подставим в (6) } x=2 \Rightarrow 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2$$

2843

$$f(x) = \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \dots \right)$$

2858

$$f(x) = \frac{x}{1+x-2x^2} = \left(\begin{array}{l} 2x^2 - x - 1 = 0 \\ x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \left[\frac{1}{-1/2}, \text{ not } 0 \right] \end{array} \right)$$

стр. 5

$$= \frac{-x}{(x-1)(2x+1)} = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2x+1} \right) = \frac{1}{3} \frac{1}{1-x} - \frac{1}{3} \frac{1}{1-(-2x)} =$$

$$= \frac{1}{3} (1+x+x^2+\dots) - \frac{1}{3} (1+2x+(2x)^2+\dots), \quad |x| < \frac{1}{2}$$

На ДОМ: 2813, 2818, 2827, 2829, 2834, 2853, 2859, 2898